# Lösung: Serie 1

**1.** a) Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ eine Folge und $x, y \in E$ so dass sowohl $x_n \to x$ als auch $x_n \to y$ im metrischen Raum $(E, d)$. Mit (iii) bekommen wir

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Das heisst, $d(x, y) = 0$. Also $x = y$, wegen (i).

b) Wir wählen als metrischen Raum $\mathbb{R}$ mit der Standardmetrik. Als Folge betrachten wir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = n$. Um zu sehen, dass diese Folge keinen Grenzwert besitzt, nehmen wir an, es existiere ein Grenzwert $x \in E$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt, $x_n \in (x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2})$. Dies ist jedoch nicht möglich, da $(x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2})$ höchstens eine natürliche Zahl und somit höchstens ein Folgenglied enthält.

**2.** Beachte dass $B_d(x, r) \in \mathcal{T}_d$ ($x \in E$, $r > 0$); nämlich, wenn $y \in B_d(x, r)$ und $s := d(x, y)$, dann gilt $B_d(y, r - s) \subset B_d(x, r)$.
**(a)** “$\Rightarrow$”: Sei $x \in E$ und $\epsilon > 0$. Dann gilt $B_{d_1}(x, \epsilon) \in \mathcal{T}_{d_1} \subset \mathcal{T}_{d_2}$, letztere Inklusion nach Annahme. Also existiert nach Definition von $\mathcal{T}_{d_2}$ ein $\delta > 0$ so dass $B_{d_2}(x, \delta) \subset B_{d_1}(x, \epsilon)$. “$\Leftarrow$”: Wenn $O \in \mathcal{T}_{d_1}$ und $x \in O$, dann existiert $\epsilon > 0$ so dass $B_{d_1}(x, \epsilon) \subset O$. Nach Annahme gibt es $\delta > 0$ so dass $B_{d_2}(x, \delta) \subset B_{d_1}(x, \epsilon) \subset O$; also gilt $O \in \mathcal{T}_{d_2}$.
**(b)** Wegen $d_1 \leq Cd_2$ haben wir $B_{d_2}(x, r/C) \subset B_{d_1}(x, r)$ ($r > 0$, $x \in E$). Nämlich, wenn $d_2(x, y) < r/C$ dann gilt $d_1(x, y) \leq Cd_2(x, y) < r$. (a) impliziert nun dass $\mathcal{T}_{d_1} \subset \mathcal{T}_{d_2}$.
**(c)** folgt aus (b).
Erinnerung: Eine Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ konvergiert bezüglich einer Metrik $d$ auf $E$ gegen $x \in E$ genau dann wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt so dass $x_n \in B_d(x, \epsilon)$ für $n \geq N$.
**(d)** Angenommen $\mathcal{T}_{d_1} \subset \mathcal{T}_{d_2}$ und $x_n \to x$ bezüglich $d_2$. Sei $\epsilon > 0$. Mit (a) finden wir $\delta > 0$ so dass $B_{d_2}(x, \delta) \subset B_{d_1}(x, \epsilon)$. Weil $x_n \to x$ bezüglich $d_2$ existiert $N \in \mathbb{N}$ so dass $x_n \in B_{d_2}(x, \delta) \subset B_{d_1}(x, \epsilon)$ für $n \geq N$. Daher gilt $x_n \to x$ bezüglich $d_1$.
**(e)** folgt aus (d).

**3.** Gegeben ein endlich-dimensionaler normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum $(E, \|\cdot\|)$, wähle eine Basis $(b_1, \ldots, b_d)$ von $E$ und definiere die Abbildung $\varphi : \mathbb{K}^d \to E$ durch $\varphi(x) := \sum_{j=1}^d x_j b_j$ für $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{K}^d$. $\varphi$ ist ein Vektorraum-Isomorphismus. Die Funktion $\rho := \|\cdot\| \circ \varphi : \mathbb{K}^d \to [0, \infty)$ ist (Lipschitz) stetig, denn für $x, y \in \mathbb{K}^d$ gilt

$$\begin{aligned}
|\rho(x) - \rho(y)| \leq \|\varphi(x) - \varphi(y)\| = \|\varphi(x-y)\| &= \left\| \sum_{j=1}^d (x_j - y_j) b_j \right\| \\
&\leq \sum_{j=1}^d |x_j - y_j| \, \|b_j\| \leq \left( \sum_{j=1}^d \|b_j\| \right) \max_{j=1,\ldots,d} |x_j - y_j| \\
&\leq \left( \sum_{j=1}^d \|b_j\| \right) \|x - y\|_{\text{eukl}}.
\end{aligned}$$

Hier bezeichnet $\|x\|_{\text{eukl}} := (\sum_{j=1}^d |x_j|^2)^{1/2}$ $(x \in \mathbb{K}^d)$ die euklidische Norm auf $\mathbb{K}^d$. Es bezeichne $S := \{x \in \mathbb{K}^d : \|x\|_{\text{eukl}} = 1\}$. Weil $S \subset \mathbb{K}^d$ kompakt ist (bezüglich der $\|x\|_{\text{eukl}}$-induzierten Metrik), $\rho|S$ strikt positiv und $\rho$ stetig ist, existieren nach dem Extremalwertsatz (den wir später auch nochmal beweisen) $0 < m < M < \infty$ so dass $\rho(S) \subset [m, M]$. Folglich, unter Benutzung der Homogenität der Norm, haben wir für alle $z \in E$,

$$\frac{\|z\|}{\|\varphi^{-1}(z)\|_{\text{eukl}}} = \left\| \frac{z}{\|\varphi^{-1}(z)\|_{\text{eukl}}} \right\| = \rho \left( \frac{\varphi^{-1}(z)}{\|\varphi^{-1}(z)\|_{\text{eukl}}} \right) \in [m, M].$$

Dies bedeutet dass die Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_{\text{eukl}} \circ \varphi^{-1}$ äquivalent sind. Da dies für alle Normen auf $E$ gilt ist die Behauptung bewiesen.

**4.** a) Wir beweisen, dass die drei Axiome einer Metrik erfüllt sind. Die Axiome (i) und (ii) sind offensichtlich erfüllt. Seien also $x, y, z \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt für $x \neq y \neq z$

$$\begin{aligned} d_P(x,z) &\leq d_2(x,0) + d_2(0,z) \leq d_2(x,0) + d_2(0,y) + d_2(y,0) + d_2(0,z) \\ &= d_P(x,y) + d_P(y,z). \end{aligned}$$

Falls $x = y \neq z$, so gilt

$$d_P(x,z) = d_P(y,z) = d_P(x,y) + d_P(y,z)$$

und analog für $x \neq y = z$, $d_P(x,z) = d_P(x,y) + d_P(y,z)$. Falls, $x = y = z$, so ist

$$d_P(x,z) = 0 = d_P(x,y) + d_P(y,z).$$

Damit ist auch die Dreiecksungleichung gezeigt.

b) Der Grenzwert der Folge $x_n = (1/n, 1/n)$ bezüglich der Standardmetrik ist 0:

$$d_2(x_n, 0) = \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Bezüglich der Metrik $d_P$ aus Teilaufgabe a) konvergiert die Folge $x_n = (1/n, 1/n)$ ebenfalls gegen 0, denn

$$d_P(x_n, 0) = d_2(x_n, 0)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) Der Grenzwert der Folge $x_n = (1/n, 1)$ bezüglich der Standardmetrik ist $(0,1)$:

$$d_2\big(x_n, (0,1)\big) = \sqrt{\left(\frac{1}{n} - 0\right)^2 + (1-1)^2} = \frac{1}{n} \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Bezüglich der Metrik $d_P$ konvergiert die Folge $x_n = (1/n, 1)$ jedoch nicht. Sei $x \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Dann ist

$$d(x_n, x) = d_2(x_n, 0) + d_2(0, x) > 1 + 0 = 1$$

falls $x_n \neq x$ und $d(x_n, x) = 0$ falls $x_n = x$. Da alle Folgenglieder verschieden sind, kann $d(x_n, x)$ für höchstens ein $n \in \mathbb{N}$ kleiner als 1 sein. Somit kann $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht gegen $x$ konvergieren. Da $x$ beliebig gewählt war, folgt die Behauptung.

**Achtung:** Es genügt nicht zu zeigen, dass $(0,1)$ kein Grenzwert der Folge $x_n = (1/n, 1)$ bezüglich der Metrik $d_P$ ist. Wieso?

5. Wir zeigen zuerst, dass $D$ eine Metrik ist. Da $[0,1]$ kompakt und $x \mapsto |f(x) - g(x)|$ stetig ist, wird das Supremum angenommen (d.h. es kann nicht $+\infty$ sein). Somit ist $D$ eine wohldefinierte Funktion von $C([0,1]) \times C([0,1])$ nach $\mathbb{R}$. Die Axiome (i) und (ii) einer Metrik sind erfüllt. Seien $f, g, h \in C([0,1])$. Die Dreiecksungleichung folgt aus

$$\begin{aligned} D(f,h) &= \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - h(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]} \big(|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|\big) \\ &\leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |g(x) - h(x)| \\ &= D(f,g) + D(g,h), \end{aligned}$$

wobei die erste Ungleichung aus der Dreiecksungleichung der Betragsfunktion folgt.
Wir zeigen nun, dass $d_1$ eine Metrik ist. Aus der Kompaktheit von $[0,1]$ und der Stetigkeit des Integranden folgt, dass das Integral konvergiert. Somit ist $d_1$ eine wohldefinierte Funktion von $C([0,1]) \times C([0,1])$ nach $\mathbb{R}$. Das Axiom (i) der Metrik folgt direkt aus der Positivität und Stetigkeit des Integranden. Beachten Sie, dass die Stetigkeit dazu notwendig ist. Dieses Problem werden Sie in der Vorlesung *Mass und Integral* noch detailierter betrachten. Axiom (ii) ist trivial. Seien $f, g, h \in C([0,1])$. Dann ist

$$\begin{aligned} d_1(f,h) &= \int_0^1 |f(x) - h(x)| dx \\ &\leq \int_0^1 \big(|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|\big) dx \\ &= \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx + \int_0^1 |g(x) - h(x)| dx \\ &= d_1(f,g) + d_1(g,h) \end{aligned}$$

womit die Dreiecksungleichung ebenfalls erfüllt ist.
Wir betrachten die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n(x) = x^n$. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert bezüglich $d_1$ gegen die Nullfunktion 0:

$$d_1(f_n, 0) = \int_0^1 |f_n(x) - 0| dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

**Achtung:** Die Funktionenfolge $f_n$ konvergiert *nicht* punktweise gegen die Nullfunktion, da $f_n(1) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $f_n$ konvergiert jedoch fast überall gegen die Nullfunktion. Mehr dazu ebenfalls in der Vorlesung *Mass und Integral*.
Es bleibt zu zeigen, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezüglich $D$ nicht gegen die Nullfunktion konvergiert. Wähle $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Dann gilt für alle $N \in \mathbb{N}$ und alle $n \geq N$,

$$D(f_n, 0) = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0| = |f_n(1)| = 1 \not< \varepsilon.$$

Es gilt sogar, dass $f_n$ überhaupt keinen Grenzwert in $\big(C([0,1]), D\big)$ besitzt. Wieso?

**Bemerkung:** Konvergenz bezüglich der Metrik $D$ entspricht gleichmässiger Konvergenz.

**6.** (a) Wir beweisen zuerst, das folgende Lemma. Falls eine Funktion

$$\Phi\colon [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$$

die drei Bedingungen

(1) $\Phi(0) = 0$ und $\Phi(x) \neq 0$ für $x \neq 0$,

(2) $\Phi$ ist monoton steigend,

(3) für alle $a, b \in [0,\infty)$ gilt $\Phi(a+b) \leq \Phi(a) + \Phi(b)$,

erfüllt, und $(E, d)$ ein metrischer Raum ist, so ist auch $(E, \Phi \circ d)$ ein metrischer Raum.

*Beweis.* Wir prüfen die Axiome einer Metrik für $\Phi \circ d$, siehe Aufgabe 1. Aus der ersten Bedingung an $\Phi$ folgt direkt Axiom (i). Axiom (ii) ist klar. Es bleibt die Dreiecksungleichung. Seien $x, y, z \in E$. Dann gilt

$$\Phi\bigl(d(x,z)\bigr) \leq \Phi\bigl(d(x,y) + d(y,z)\bigr) \leq \Phi\bigl(d(x,y)\bigr) + \Phi\bigl(d(y,z)\bigr)$$

wobei wir die Bedingungen (ii) und (iii) an $\Phi$ ausgenutzt haben. □

Um zu zeigen, dass $d'$ eine Metrik ist, genügt es nun zu prüfen, dass die Funktion

$$\Phi(t) = \frac{t}{1+t}$$

die drei geforderten Bedingungen erfüllt. Bedingung (1) ist klar. Um die Monotonie zu zeigen, leiten wir $\Phi$ ab und erhalten

$$\Phi'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} > 0.$$

Somit ist $\Phi$ (strikt) monoton steigend. Wir prüfen noch Bedingung (3). Für $s, t \in [0,\infty)$ gilt

$$\begin{aligned} \Phi(s+t) &= \frac{s+t}{1+s+t} = \frac{s}{1+s+t} + \frac{t}{1+s+t} \\ &\leq \frac{s}{1+s} + \frac{t}{1+t} = \Phi(s) + \Phi(t). \end{aligned}$$

Weil $d' \leq d$ haben wir $\mathcal{T}_{d'} \subset \mathcal{T}_d$ (vgl. Aufgabe 2b). $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_{d'}$ folgt aus Aufgabe 2a und der folgenden Beobachtung: $d' = \Phi \circ d$ wobei $\Phi(t) := t/(1+t)$ mit $\Phi(0) = 0$, und $\Phi^{-1}$ ist stetig bei 0.
Angenommen, $d$ und $d'$ sind äquivalent. Dann gibt es eine Konstante $C' > 0$ so dass

$$\forall x, y \in E: \quad d(x,y) \leq C' d'(x,y).$$

Weil $d' \leq 1$ ist dann $d$ beschränkt. (Damit haben wir die Kontraposition der behaupteten Aussage gezeigt.)

(b) Ja, solch eine Metrik existiert. Die Metrik $d := \Phi \circ d_{\mathrm{glm}}$, mit $\Phi(t) = t/(1+t)$ (oder noch besser $\Phi(t) = \min(t, 1)$), ist nicht nur auf $B(X, \mathbb{R})$ sondern auf ganz $\mathbb{R}^X$ definiert, und hat die beiden geforderten Eigenschaften: Wegen (a) haben wir $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d_{\mathrm{glm}}}$ auf $B(X, \mathbb{R})$. Weiter, weil $\Phi$ die Eigenschaft

$$\forall \text{ Folge } \{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \quad \Phi(t_n) \to 0 \Leftrightarrow t_n \to 0$$

hat, gilt für jedes $f \in \mathbb{R}^X$ und jede Funktionenfolge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^X$,

$$d(f, f_n) \to 0 \Leftrightarrow d_{\mathrm{glm}}(f, f_n) \to 0.$$

Letzteres bedeutet dass Konvergenz bezüglich der Metrik $d$ gleichmässige Konvergenz ist.